Foundation of Optimization
最优化原理

李晓鹏
Li Xiao-Peng

电子与信息工程学院
School of Electronic and Information Engineering

Semester–I 2024/25

目录

1. LP标准形
2. LP基本原理
3. 单纯形法(Simplex method)
4. 大M法
5. 二阶段法
6. 线性规划的对偶理论

目录

1. **LP标准形**
2. LP基本原理
3. 单纯形法(Simplex method)
4. 大M法
5. 二阶段法
6. 线性规划的对偶理论

LP标准形

考虑如下约束数学规划模型:

$$\begin{aligned} \max\ & f(\boldsymbol{x})(\text{或} \min f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ s.t.\ & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, l \\ & g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

其中：$f(\boldsymbol{x}), h_i(\boldsymbol{x}), g_j(\boldsymbol{x})$ 都是线性函数. 即：

$$\begin{aligned} \max(\min)\ f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq (\leq, =) b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m + l \end{aligned}$$

LP标准形

线性规划的形式是多种多样的：

- 目标函数求极大(极小);
- 约束可能有等式约束，也可能有不等式约束；
- 决策变量有的受非负约束，有的是无限制.

为了方便研究，考虑将各种形式的LP化为一种统一的形式，这种形式即被称为LP的标准形式.

LP标准形

$$\boxed{\begin{aligned} &\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ &\qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}}$$

三大特点:

- 目标函数：min
- 约束条件：$=$
- 变量符号：≥ 0

LP标准型

化标准型的常用策略：

1. $\max\ z \rightarrow \min\ f = -z$
2. $x_j \geq h_j\ (h_j \neq 0) \rightarrow$ 令 $x_{n+1} = x_j - h_j$, 则 $x_{n+1} \geq 0$
3. $x_j \leq 0 \rightarrow$ 令 $x_{n+1} = -x_j$, 则 $x_{n+1} \geq 0$
4. x_j 的符号无限制 $\rightarrow$ 引入 $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$,令 $x_j = x_{n+1} - x_{n+2}$
5. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$, $x_{n+1} \geq 0$，其中 x_{n+1} 为松弛变量
6. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$, $x_{n+1} \geq 0$，其中 x_{n+1} 为剩余变量

LP标准型

例 1: 将下列LP化为标准型:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & x_1 + 7x_2 \ge 4 \\ & 2x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \text{ 为无约束} \end{aligned}$$

LP标准型

例 1: 将下列LP化为标准型:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 + 7x_2 &\ge 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ \text{为无约束} \end{aligned}$$

分析: 共有4处不符合LP标准形的要求。
解:
1) 令$f = -z, \min f = -x_1 - x_2$
2) 令$x_2 = x_3 - x_4,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$并将上式代入原模型,消去 x_2
3) 对于不等式约束条件,分别引入松弛变量和剩余变量,将它们化为等式约束.

LP标准型

则相应的标准形为

$$
\begin{aligned}
\min\ & f = -x_1 - x_3 + x_4 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \\
& x_1 + 7x_3 - 7x_4 - x_6 = 4 \\
& 2x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

其中：x_5为松弛变量，x_6为剩余变量。

LP标准型

例 2: 将下列LP化为标准型:

$$\begin{aligned} \max\ & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

LP标准型

例 2: 将下列LP化为标准型：

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

分析: 共有5处不符合LP标准形的要求

解:

1) 令 $f = -z$, 则 $\min f = -5x_1 - 4x_2$

2) 令 $x_3 = -x_2$, 则 $x_3 \geq 0$ 并将上式代入原模型，消去 x_2

3) 对于不等式约束条件，分别引入松弛变量和剩余变量，将它们化为等式约束。

LP标准型

则相应的标准形为:

$$
\begin{aligned}
\min\ & f = -5x_1 + 4x_3 \\
\text{s.t. } & 3x_1 - 5x_3 + x_4 = 15 \\
& 2x_1 - x_3 - x_5 = 5 \\
& 2x_1 - 2x_3 + x_6 = 11 \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

其中, x_4和x_6为松弛变量, x_5为剩余变量.

目录

1. LP标准形
2. **LP基本原理**
3. 单纯形法(Simplex method)
4. 大M法
5. 二阶段法
6. 线性规划的对偶理论

LP基本原理

将LP化为标准形后，如何求最优解呢？

有一个定理给出了这个问题的答案，这就是**LP基本定理**

LP标准形的矩阵形式

$$\min z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

即:

$$\begin{aligned} \min\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

其中:

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

例 3: 求下列LP标准形的矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\min\ & f = -5x_1 + 4x_3 \\
\text{s.t. } & 3x_1 - 5x_3 + x_4 = 15 \\
& 2x_1 - x_3 - x_5 = 5 \\
& 2x_1 - 2x_3 + x_6 = 11 \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

例 3: 求下列LP标准形的矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\min\ f &= -5x_1 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\ 3x_1 &- 5x_3 + x_4 = 15 \\
2x_1 &- x_3 - x_5 = 5 \\
2x_1 &- 2x_3 + x_6 = 11 \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6
\end{aligned}
$$

解:矩阵形式为 $\min f = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
其中:

$$
\boldsymbol{c} = \left(-5, 0, 4, 0, 0, 0\right)^T, \boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right)^T
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}
$$

例 4: 求下列LP标准形的矩阵形式

$$\begin{aligned} \min\ f &= -4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } & 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{aligned}$$

例 4: 求下列LP标准形的矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\min\ f &= -4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\
-4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2 \\
x_j \geq 0, j &= 1, \cdots, 5
\end{aligned}
$$

解:矩阵形式为 $\min f = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

其中:

$$
\boldsymbol{c} = \left(-4, 2, 1, 0, 0\right)^T, \boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)^T
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

一、线性规划的基本概念

考虑具有标准形的LP:

$$\begin{aligned} \min\ f &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

约束系数矩阵$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵, $m \leq n$, 并且$r(\boldsymbol{A}) = m$. 于是$\boldsymbol{A}$中至少有一个$m \times m$子矩阵$\boldsymbol{B}$, 使得$r(\boldsymbol{B}) = m$.

1.基矩阵: 若$\boldsymbol{A}$中的$m \times m$子矩阵$\boldsymbol{B}$ 满足$r(\boldsymbol{B}) = m$, 即$|\boldsymbol{B}| \neq 0$, 则称$\boldsymbol{B}$是LP问题的一个基矩阵(简称为基)。

当$m = n$时, 基矩阵唯一;

当$m < n$时, 基矩阵就可能有多个, 但数目不超过C_n^m个。

例 5: 已知系数矩阵为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

求系数矩阵的基矩阵.

例 5: 已知系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

求系数矩阵的基矩阵.

易看出$r(\boldsymbol{A}) = 2$, 2阶子矩阵至多有$C_3^2 = 3$个.

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, 是不是基矩阵?

例 6: 求下列问题的基矩阵

$$\begin{aligned} \min\ f &= -4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } & 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{aligned}$$

解:约束方程的系数矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易看出$r(\boldsymbol{A}) = 2$, 2阶子矩阵至多有$C_5^2 = 10$个.

LP基本原理

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

但对于$B_{10} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$, 由于$|B_{10}| = 0$,故$B_{10}$不是基。

2.基向量: 基矩阵对应的列向量称为基向量，其余列向量称为非基向量

3.基变量: 基向量对应的变量称为基变量,非基向量对应的变量称为非基变量(自由变量)。

例如: 对于基矩阵 $\boldsymbol{B}_2$ 而言, x_1, x_4是基变量, x_2, x_3, x_5是非基变量。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix},$$

思考: 基变量的选取唯一吗?取法有多少种?

【注】 基变量、非基变量是针对某一确定基而言的,不同的基对应的基变量和非基变量也不同。

4. 基本解: 对于某一确定的基矩阵 B, 选定基变量和自由变量, 用自由变量表示基变量, 写出同解方程组. 令所有自由变量等于零, 求出$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解, 称这组解为关于基矩阵 B 的基本解.

【注】 基变量的选取方式$\leq C_n^m$有限, 所以基本解的个数也为有限个.

5.基可行解: 非负的基本解称为基可行解(基本可行解)

可见:求基可行解要先求基本解,然后看是否非负即可。另外,基本可行解也一定为有限个.

【注】 基可行解也被定义为“可行的基本解”.

LP基本原理

例7: 求

$$\begin{aligned} \min\ z &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t. } 2x_1 - 4x_3 + x_4 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_j \geq 0, j &= 1, \cdots, 4 \end{aligned}$$

的一个基本解和一个基本可行解.

LP基本原理

解:约束方程的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

注意到$\boldsymbol{A}$是2×4矩阵, 且$r(\boldsymbol{A})=2$.
由于第2列和第4列线性无关, 构成一个2阶单位子块因此可构成一个基矩阵.
取x_2,x_4为基变量, x_1,x_3为自由变量,用自由变量表示基变量得如下同解方程组:

$$\begin{cases} x_2=5+x_1-3x_3 \\ x_4=6-2x_1+4x_3 \end{cases}$$

LP基本原理

$$\begin{cases} x_2 = 5 + x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 6 - 2x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

令$x_1 = x_3 = 0$ 得: $x_2 = 5, x_4 = 6$
于是,得一个基本解:

$$\boldsymbol{x} = (0, 5, 0, 6)^T$$

又因该解非负, 所以又是一个基本可行解。

思考: 若基变量选为其他变量时, 如何求基本解呢?

启发: 若系数矩阵中含有m阶单位子块, 是不是很容易求出基本解呢?

LP基本原理

基变量取为其他变量的情况
若取x_1, x_2为基变量,x_3, x_4为自由变量, 由于基本解中自由变量全取零, 所以只需对第一列,第二列以及常数项列组成的矩阵初等行变换至行最简形:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & 6 \\ -1 & 1 & & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 3 \\ 0 & 1 & & 8 \end{pmatrix}$$

由此可得基本解: $\boldsymbol{x} = \left(3, 8, 0, 0\right)^T$
又因 $3 > 0, 8 > 0$,该解显然非负,因此这个解也是一个基本可行解。

LP基本原理

结论:
设约束线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A}) = m$, 记增广矩阵为$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$,则以下结论成立:
若系数矩阵$\boldsymbol{A}$中存在m阶单位子块, 且对应的常数项非负, 那么从增广矩阵中便可读出一个基本可行解. 其中, 基变量的取值为单位子块中1所对应的右边常数项的值, 自由变量取值全为零.

三、线性规划的基本定理

考虑标准形式的线性规划问题

$$\boxed{\begin{aligned} &\min\ z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}}$$

$$r(\boldsymbol{A}) = m < n$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

定理3.1
(1) 线性规划问题若有可行解, 那么一定有基本可行解。
(2) 线性规划问题若有最优解, 则一定有最优的基本可行解。

LP基本原理

几何意义

推论3.1:若线性规划问题的可行域非空, 则它一定有顶点。若有最优解, 则最优解一定可以在可行域的顶点上达到。

上面推论的证明用到下面两个定理:

定理3.2 线性规划问题的可行域D(若非空)是凸集。

定理3.3 设x是线性规划问题可行解, 则它是基本可行解的充要条件是其为可行域D的顶点。

目录

1. LP标准形
2. LP基本原理
3. 单纯形法(Simplex method)
4. 大M法
5. 二阶段法
6. 线性规划的对偶理论

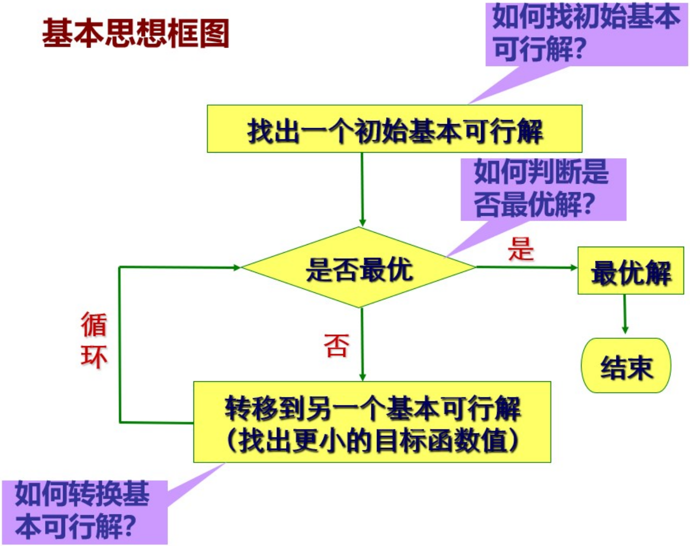
单纯形法

第三节单纯形法(Simplex method)–G.B.Dantzig (1947)

一、基本思想

从标准形的LP模型的一个基可行解出发, 判断是否是最优。如果是最优解,结束运算; 否则, 设法找到一个更优(使目标函数值减小)的基本可行解。如此继续, 经过有限次迭代, 就可以找到LP的最优解或判别LP问题有没有最优解。

单纯形法


基本思想框图
如何找初始基本可行解?
找出一个初始基本可行解
如何判断是否最优解?
是否最优
是
最优解
结束
否
循环
转移到另一个基本可行解
(找出更小的目标函数值)
如何转换基本可行解?

单纯形法

回顾上一节例题:
求

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
\text{s.t. } 2x_1 - 4x_3 + x_4 &= 6 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_j \geq 0, j &= 1, \cdots, 4
\end{aligned}
$$

的一个基本解和一个基本可行解.

解: 约束方程的增广矩阵为:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

注意到$\boldsymbol{A}$是 2×4 矩阵, $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

由于第2列和第4列线性无关, 构成一个2阶单位子块, 因此可构成一个基矩阵.

取x_2, x_4为基变量, x_1, x_3为自由变量, 用自由变量表表示基变量得如下同解方程组:

$$\begin{cases} x_2 = 5 + x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 6 - 2x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

单纯形法

$$\begin{cases} x_2 = 5 + x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 6 - 2x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

令$x_1 = x_3 = 0$得: $x_2 = 5, x_4 = 6$
由此得一基本解:

$$\boldsymbol{x} = (0, 5, 0, 6)^T$$

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

又因 $5 > 0, 6 > 0$, 该解显然非负,因此这个解也是一个基本可行解。

单纯形法

基变量取为其他变量的情况

若取x_1, x_2为**基变量**,x_3, x_4**为自由变量**,由于基本解中自由变量全取零,所以只需对第一列,第二列以及常数项列组成的矩阵初等行变换至行最简形:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & 6 \\ -1 & 1 & & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 3 \\ 0 & 1 & & 8 \end{pmatrix}$$

由此可得基本解: $\boldsymbol{x} = (3, 8, 0, 0)^T$

又因$3 > 0, 8 > 0$,该解显然非负,因此这个解也是一个基本可行解。

结论：
设约束线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=m$,记增广矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则有如下结论成立：

若系数矩阵$\boldsymbol{A}$中存在m阶单位子块，且对应的常数项非负，那么从增广矩阵中便可读出一个基本可行解. 其中，基变量的取值为单位子块中1所对应的右边常数项的值，自由变量取值全为零.

得到基本可行解之后，如何判断它是否是最优解呢？

单纯形法

该解是否最优呢？

注意到目标函数为$\min z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$，

将 $\begin{cases} x_2 = 5 + x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 6 - 2x_1 + 4x_3 \end{cases}$ 代入目标函数表达式中消去 x_2 和 x_4，

得:

$$z = 9 - 10x_1 + 27x_3$$

注意到 x_1 的系数为 $-10 < 0$，而可行域中 $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

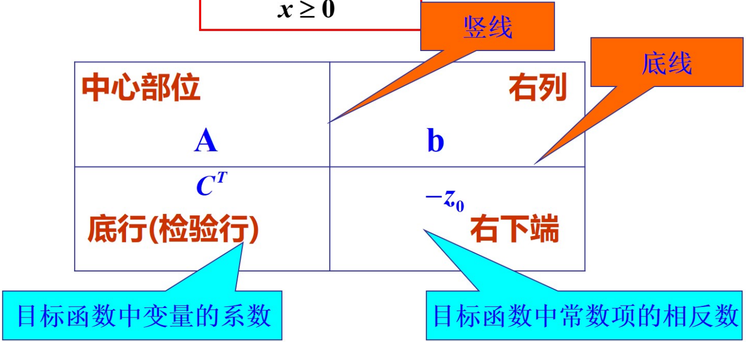
可见，当 $x_1 > 0$ 时，目标函数值减小，所以 $\boldsymbol{x} = (0, 5, 0, 6)^T$ 不是最优解。

思考： 若此时目标函数中自由变量 x_1, x_3 的系数均非负，那么这个解是否是最优解？

二、单纯形表及容许的运算

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & z = C^T x + z_0 \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

$r(A) = m$



单纯形法

2、容许运算

中心部位 **A**	**b** **右列**
底行 c^T	**0** **右下端**

1)底线以上的行可进行初等行变换(三种);

- 交换矩阵的两行（列）
- 以一个非零数 c 乘矩阵的某一行（列）
- 把矩阵的某一行（列）的 c 倍加于另一行（列）上

2)底线以上的行乘常数后加至底行(包括右下端).

使表具备下面四个特点：①②③④

单纯形法

3)终止条件(最优性条件)
当表格具备如下特点:

① 中心部位具有 m 阶单位子块

② 右列元素非负

满足①②时,可读出基本可行解

③底行中相应于单位子块位置的元素为0(目标函数中基变量的系数为零)

满足①②③,旨在判断该解是否最优.

④ 底行其他元素非负(自由变量对应的元素非负),则从表格中即可读得LP问题的
最优解和最优值.

满足①②③④时,可断定该基本可行解是最优解.

单纯形法

最优解及最优值的读法:
单位子块中1所在列对应的变量(基变量)取相应右列的值, 其余变量(自由变量)取值为零, 将它们写在一起即是一个最优解.

而此时**右下端元素**的相反数即为相应的**最优值**.

单纯形法

$$\min \ z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 \quad -4x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \quad = 5 \\ x_j \geq 0 \ , \ j = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

	x_2		x_4	
2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
1	-3	2	4	0

满足①② → 基本可行解 $x = (0, 5, 0, 6)^T$

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
-10	0	27	0	-9

满足①②③ 但不满足④ → $x = (0, 5, 0, 6)^T$ 不是最优解

$z = 9 - 10x_1 + 27x_3$ x_1 **的系数为-10<0**

单纯形法

当前基本可行解不是最优怎么办?
以上讲述了利用单纯形表以及容许运算求得一个基本可行解,并判断其是否最优的方法.

若该基本可行解不是最优的, 那么如何由当前表得到一个更优(对应的目标函数值下降)的基本可行解呢?

由上面例题知x_1取值大于零时, 目标函数值下降. 这就意味着x_1将成为基变量, 不再是自由变量; 那么x_2, x_4中至少一个将由基变量变为自由变量.

单纯形法的后半部分讨论的主要内容.

单纯形法

三、基可行解的转换

设当前表格已具备①②③三个特点，但④不满足:

$\tilde{a}_{11}$	$\tilde{a}_{12}$	$\cdots$	$\tilde{a}_{1n}$	$\tilde{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{a}_{m1}$	$\tilde{a}_{m2}$	$\cdots$	$\tilde{a}_{mn}$	$\tilde{b}_m$
$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	$\cdots$	$\tilde{c}_n$	$-\tilde{z}$

1) 进基变量的确定 从底行中任选一个负元素，比如令 $\widetilde{c}_j = \min\{\widetilde{c}_l \mid \widetilde{c}_l < 0\}$。$\widetilde{c}_j$ 对应的 x_j 取为进基变量。

单纯形法

2) 离基变量的确定

从所选元素所在的列(第 j 列)底线以上的正元素中按"最小比例原则" (θ 原则)选取一个，记为 $\widetilde{a}_{kj}$，其中：

$$\frac{\widetilde{b_k}}{\widetilde{a_{kj}}} = \min\left\{\frac{\widetilde{b_i}}{\widetilde{a_{ij}}} \mid \widetilde{a_{ij}} > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\right\}$$

3) 进行旋转运算

利用容许的运算将 $\widetilde{a}_{kj}$ 变为1，该列其它元素(包括底行相应的元素)变为0，从而实现将 x_j 变为基变量的目的。

四、单纯形算法及应用

1. 单纯形法的迭代步骤

1) 将问题化为标准形，写出相应的表格；

2) 建立满足 ①②③ 三个特点的初始单纯形表：

- 若1)对应的表格满足 ①②③，直接进入第3)步；
- 若1)对应的表格满足 ①②，但 ③ 不满足，则利用将底行以上行的若干倍数加到底行，使 ③ 满足；
- 若1)对应的表格不满足 ①②，则借助大M法（下一节的内容）使 ①② 满足，然后再使 ③ 满足。

3) 若底行元素全非负，则得到最优解，结束运算，否则转4)。

4) 确定进基变量：从底行中任选一个负元素，比如令 $\widetilde{c}_j = \min\{\widetilde{c}_l \mid \widetilde{c}_l < 0\}$。$\widetilde{c}_j$ 对应的 x_j 取为进基变量。

单纯形法

5) 确定离基变量：从所选元素所在的列(第 j 列)底线以上的正元素中按“最小比例原则”选取一个，记为 $\widetilde{a}_{kj}$，其中：

$$\frac{\widetilde{b_k}}{\widetilde{a_{kj}}} = \min\left\{\frac{\widetilde{b_i}}{\widetilde{a_{ij}}} \mid \widetilde{a_{ij}} > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\right\}$$

6) 进行旋转运算：利用容许的运算将 $\widetilde{a}_{kj}$ 变为1，该列其它元素变为0，从而实现将 x_j 变为基变量的目的。

7) 观察得到的新表（满足 ① ② ③）。若底行所有元素均非负，则已得最优解，结束运算；否则，返回第4)步。

单纯形法

例8: 求解 LP

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
\text{s.t. } 2x_1 - 4x_3 + x_4 &= 6 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_j \geq 0,\ j &= 1, \cdots, 4
\end{aligned}
$$

解：该LP已是标准形，故直接列出如下表格：

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
1	-3	2	4	0

满足①② → 基本可行解 $x = (0, 5, 0, 6)^T$

单纯形法

为判断该解是否最优，利用容许的运算使 ③ 满足，得：

r_3+3r_2
r_3-4r_1
$\rightarrow$

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
-10	0	27	0	-9

满足①②③ 但不满足④

$x=(0,5,0,6)^T$
不是最优解

$r_1\times\frac{1}{2}$
r_2+r_1
r_3+10r_1
$\rightarrow$

1	0	-2	1/2	3
0	1	1	1/2	8
0	0	7	5	21

满足①②③④

$x=(3,8,0,0)^T$
是最优解

可见此LP有最优解 $\boldsymbol{x}^*=(3,8,0,0)^T$，最优值为 $z_{\min}=-21$。

单纯形法

例9: 求解 LP

$$\begin{aligned} \min\ z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\ -x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

解： 先化 LP 为标准形，后列出如下表格：

$$\begin{aligned} \min\ z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

单纯形法

方法一：取底行中最小的负元素对应的变量为进基变量

-1	1	1	0	0	2
1	2	0	1	0	10
3	1	0	0	1	15
-2	-3	0	0	0	0

$$\min\left\{\frac{2}{1},\frac{10}{2},\frac{15}{1}\right\}=\frac{2}{1}$$

r_4+3r_1
r_2-2r_1
r_3-r_1
$\rightarrow$

-1	1	1	0	0	2
3	0	-2	1	0	6
4	0	-1	0	1	13
-5	0	3	0	0	6

$$\min\left\{\frac{6}{3},\frac{13}{4}\right\}=\frac{6}{3}$$

单纯形法

$r_2 \times \frac{1}{3}$
$r_1 + r_2$
$r_3 - 4r_2$
$r_4 + 5r_2$

	0	1	1/3	1/3	0	4
	1	0	-2/3	1/3	0	2
$\rightarrow$	0	0	5/3	- 4/3	1	5
	0	0	-1/3	5/3	0	16

$$\min\left\{\frac{5}{5/3}, \frac{4}{1/3}\right\} = \frac{5}{5/3}$$

	0	1	0	3/5	-1/5	3
$\rightarrow$	1	0	0	-1/5	2/5	4
	0	0	1	-4/5	3/5	3
	0	0	0	7/5	1/5	17

满足①②③④

单纯形法

0	1	0	3/5	-1/5	3
1	0	0	-1/5	2/5	4
0	0	1	-4/5	3/5	3
0	0	0	7/5	1/5	17

满足①②③④

$\boldsymbol{x} = (4,3,3,0,0)^T$**是化为标准形的LP的最优解**略去松弛变量则可得原问题的最优解。

即原LP问题的最优解为$\boldsymbol{x}^* = (4,3)^T$, 最优值为$z_{\min} = -17$.

单纯形法

方法二：取底行中左边第一个负元素对应的变量为进基变量

-1	1	1	0	0	2
1	2	0	1	0	10
3	1	0	0	1	15
-2	-3	0	0	0	0

$$\min\left\{\frac{10}{1},\frac{15}{3}\right\}=\frac{15}{3}$$

$r_3\times\frac{1}{3}$
r_1+r_3
r_2-r_3
r_4+2r_3
$\rightarrow$

0	4/3	1	0	1/3	7
0	5/3	0	1	-1/3	5
1	1/3	0	0	1/3	5
0	-7/3	0	0	2/3	10

$$\min\left\{\frac{7}{4/3},\frac{5}{5/3},\frac{5}{1/3}\right\}=\frac{5}{5/3}$$

单纯形法

$r_1-\frac{4}{5}r_2$	0	0	1	-4/5	3/5	3	满
$r_3-\frac{1}{5}r_2$	0	1	0	3/5	-1/5	3	足 ①
$r_2\times\frac{3}{5}$	1	0	0	- 1/5	2/5	4	②
$r_4+\frac{7}{3}r_2$ $\rightarrow$	0	0	0	7/5	1/5	17	③ ④

$\boldsymbol{x} = (4,3,3,0,0)^T$**是化为标准形的LP的最优解**略去松弛变量则可得原问题的最优解。

即原LP问题的最优解为$\boldsymbol{x}^* = (4,3)^T$, 最优值为$z_{\min} = -17$.

单纯形法(注意事项)

1) 若迭代过程中右列元素中出现0元素 (此时对应的基本可行解中某基变量的取值为0，那么称该基本可行解是退化的，接下来的迭代可能出现循环.
解决办法：在每次选进基变量时，每次选底行中左边第一个负元素对应的变量为进基变量(勃兰特法则),这就是改进的单纯形法。
2) 若最终表格中底行元素均非负，且所有自由变量(非基变量)对应的底行元素 (检验数)均大于0,则此时LP有唯一最优解。
3) 若最终表格中底行元素均非负，且存在某自由变量(非基变量)对应的底行元素 (检验数)等于0,则此时LP有无穷多最优解。
4) 若最终表格中底行存在负元素，且对应进基变量所在的列中底线以上没有正元素(无法迭代下去),则此LP问题无最优解。

五.收敛性定理

定理3.1 在已知一个基本可行解(初始基本可行解)的前提下使用单纯形法求解LP问题时，若每次迭代得到的基本可行解中基变量均大于零(称非退化的),则算法必在有限步后终止。

证明：基本可行解有限 $+$ 非退化(不出现循环), 总能找到最优解.

目录

1. LP标准形
2. LP基本原理
3. 单纯形法(Simplex method)
4. **大M法**
5. 二阶段法
6. 线性规划的对偶理论

大M法

基本思想

单纯形法是从一个初始基可行解开始的，即要求标准形对应的单纯形表满足

①中心部位具有m阶单位子块;

②右列元素非负.

但当①②不满足时，即原LP问题的初始基本可行解不易找出或不存在，此时怎么办？

大M法

基本思想

单纯形法是从一个初始基可行解开始的，即要求标准形对应的单纯形表满足

①中心部位具有m阶单位子块;

②右列元素非负.

但当①②不满足时，即原LP问题的初始基本可行解不易找出或不存在，此时怎么办？

解决办法:

首先利用容许运算使②满足，即使右列元素非负;

然后在中心部位人工添加一些单位列向量，使中心部位具有m阶单位子块，也就是使①满足. (引入人工变量)

接下来修改目标函数, 从而得到新的线性规划模型

最后用单纯形法求解新LP模型而得到原LP模型的最优解.

大M法

例10：求解：

$$\begin{aligned} \min\ z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.}\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{I}) \end{aligned}$$

分析：对应表格

3	2	-3	6
-1	2	-1	-4
-3	1	2	0

可见, $r(A) = 2$. 但 ①②不满足.

大M法

$r_2 \times (-1)$ $\rightarrow$

3	2	-3	6
1	-2	1	4
-3	1	2	0

满足②

人工变量

			x_4	x_5	
3	2	-3	1	0	6
1	-2	1	0	1	4
-3	1	2	M	M	0

人工变量的系数

大M法

3	2	-3	1	0	6
1	-2	1	0	1	4
-3	1	2	M	M	0

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 + \mathbf{M}x_4 + \mathbf{M}x_5 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \qquad \cdots\cdots(\text{II}) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

其中$M > 0$为足够大的正常数.

大M法

一、补充定理

对于线性规划问题:

$$\min z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \cdots (4.1)$$

假设 $r(\boldsymbol{A}) = m$, 且对应的初始单纯形表 ② 满足，① 不满足。那么：引入人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 构造新的线性规划问题

$$\min \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j \quad \text{其中} M > 0 \text{为足够大的数}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+m \end{cases} \qquad \cdots (4.2)$$

大M法

令$\boldsymbol{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})^T, \quad \boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$

$$\begin{aligned} \min\ \bar{z} &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + M\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2) \\ \boldsymbol{x} \geq 0, &\quad \boldsymbol{y} \geq 0 \end{aligned}$$

人工变量全是自由变量

大M法

定理4.1 设 $\binom{\boldsymbol{x}^*}{\boldsymbol{y}^*}$是(4.2)最优解.若 $\boldsymbol{y}^* = 0$, 则$\boldsymbol{x}^*$是(4.1) 的最优解;若 $\boldsymbol{y}^* \neq \mathbf{0}$, 则(4.1) 没有可行解。反之,若 $\boldsymbol{x}^*$ 是(4.1) 的最优解, 则 $\binom{\boldsymbol{x}^*}{\mathbf{0}}$是(4.2)的最优解。

证明： 设$(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{y}^{*T})^T$是 (4.2) 的最优解.
(i) 若 $\boldsymbol{y}^* = 0$, 则$\boldsymbol{x}^*$是(4.1)的最优解；因$(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{y}^{*T})^T(\boldsymbol{y}^* = 0)$ 是 (4.2) 的最优解，也是可行解 ,故 $\boldsymbol{x}^*$是 (4.1)的可行解。
下证对于(4.1),$\boldsymbol{x}^*$对应的目标函数值最小。
设$\boldsymbol{x}$是原 LP(4.1)的任一可行解，则 $(\boldsymbol{x}^T, \mathbf{0}^T)^T$ 是(4.2)的可行解，且对应的函数值为$\tilde{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
由于$(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{y}^{*T})^T(\boldsymbol{y}^* = 0)$是 (4.2)的最优解 (最小值点),则有

$$\tilde{z}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \leq \tilde{z} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

综上可知，$\boldsymbol{x}^*$是原 LP(4.1) 的最优解。

大M法

(ii)若$\boldsymbol{y}^* \neq 0$,则(4.1)无可行解。
反证法: 假设这种情况下(4.1)有可行解$\widetilde{\boldsymbol{x}}$, 则 $(\widetilde{\boldsymbol{x}}^T, \mathbf{0}^T)^T$是 (4.2) 的可行解，且对应的函数值为$\tilde{z} = \boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}$
而(4.2)的最优解$(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{y}^{*T})^T(\boldsymbol{y}^* \neq 0)$ 对应的目标函数值为

$$\tilde{z}^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* + M\sum_{j=1}^{m} y_j^*$$

由于$\boldsymbol{y}^* \geq 0$,可见当 M足够大时，必有：$\tilde{z}^* > \tilde{z}$,
这与$(\boldsymbol{x}^*T, \boldsymbol{y}^{*T})^T$是 (4.2) 的最优解 (最小点) 矛盾。
因此假设不成立，即(4.1)无可行解得证。

大M法

(iii) 若 $\boldsymbol{x}^*$是(4.1)的最优解,则$(\boldsymbol{x}^{*T},\mathbf{0}^T)^T$是(4.2)的最优解.

显然$(\boldsymbol{x}^T,\mathbf{0}^T)^T$是(4.2)的一个可行解; 设$(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{y}^T)^T$是(4.2)的任一可行解,下面证$(\boldsymbol{x}^{*T},\mathbf{0}^T)^T$对应的函数值比它对应的函数值小。

分情况讨论:

(1)若$\boldsymbol{y}=0$,由于 $\boldsymbol{x}$是(4.1)的一个可行解,于是$z^+=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\leq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

(2)若$\boldsymbol{y}\neq 0$,由于$M>0$可以充分大,且 $\boldsymbol{y}\geq 0$,所以必有$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*\leqslant\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+M\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{y}$

可见 $(\boldsymbol{x}^T,\mathbf{0}^T)^T$对应的函数值比$(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{y}^T)^T$对应的小.

综上知$(\boldsymbol{x}^{*T},\mathbf{0}^T)^T$是(4.2)的最优解,最优值为$\tilde{z}^*=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$.

【注】若新的问题(4.2)无最优解, 则原LP问题(4.1)也无最优解。

大M法

二、算法(大M法)–初始表不满足①②

1. 大M法的求解步骤

(1) 经初等行变换使右列元素非负，通常为 $\boldsymbol{r}_i \times (-1)$.

(2) 在中心部位添加一个m阶单位子块，即引入人工变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$,得到新的约束方程组；

(3) 将目标函数修改为 $\bar{z} = z + M\sum_{j=1}^{m} y_j$,其中M为足够大的正常数，从而得到新的LP模型.

(4) 用单纯形求解新的LP模型，试图将$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 变成自由变量，最终将出现 5)或6)两种情况：

大M法

5) 设求得新的LP模型的最优解为$(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{y}^{*T})^T$,

   若$\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T = 0$,则$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ 是原LP问题的最优解.

   若$\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T \neq 0$,则原LP问题无最优解。

6) 新的LP无界(无最优解),则原LP问题也无最优解.

【注】 在上面5)中提到的$\boldsymbol{y}^* \neq \mathbf{0}$的情况属于下面情形:
用单纯形法求解新LP得到的新表格满足① ② ③ ④, 但人工变量并没有完全成为自由变量。此时说明原LP问题无可行解，自然也就没有最优解。

大M法

例11:

$$\begin{aligned} \min\ z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \cdots (\mathrm{I}) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解：该LP已是标准形，画出对应表格：

3	**2**	**-3**	**6**
-1	**2**	**-1**	**-4**
-3	**1**	**2**	**0**

可见，$r(\boldsymbol{A}) = 2$.但① ②不满足。

大M法

故用大M法使① ②满足

3	**2**	**-3**	**1**	**0**	**6**
1	**-2**	**1**	**0**	**1**	**4**
-3	**1**	**2**	**M**	**M**	**0**

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 + \mathbf{M}x_4 + \mathbf{M}x_5 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + 2x, -3x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \cdots\cdots (\text{II}) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

下面用单纯形法求解这个新LP问题。

大M法

3	2	-3	1	0	6
1	-2	1	0	1	4
-3	1	2	M	M	0

满足①②但不满足③

→

3	2	-3	1	0	6
1	-2	1	0	1	4
-3-4M	1	2+2M	0	0	-10M

满足①②③但不满足④

大M法

1	2/3	-1	1/3	0	2
0	-8/3	2	-1/3	1	2
0	3+ 8M/3	-1-2M	1+4M/3	0	6-2M

满足①②③④ 但不满足

1	-2/3	0	1/6	1/2	3
0	-4/3	1	-1/6	1/2	1
0	5/3	0	M+5/6	1/2+M	7

满足①②③④

大M法

1	-2/3	0	1/6	1/2	3
0	-4/3	1	-1/6	1/2	1
0	5/3	0	M+5/6	1/2+M	7

满足①②③④

故新LP问题(II)的最优解为：

$$\boldsymbol{X}^* = (3, 0, 1, 0, 0)^T$$

注意到人工变量x_4, x_5均为0，故原LP (I)的最优解为：

$$\boldsymbol{x}^* = (3, 0, 1)^T$$

对应的最优值为: $z_{\min} = -7$.

大M法

例12:

$$\begin{aligned}\min\ & z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{aligned}$$

大M法

例12:

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：该LP已是标准形，画出对应表格：

1	2	3	4	7
2	1	1	2	3
5	-2	3	-6	0

大M法

1	2	3	4	1	0	7
2	1	1	2	0	1	3
5	-2	3	-6	M	M	0

1	2	3	4	1	0	7
2	1	1	2	0	1	3
5-3M	-2 -3M	3-4M	-6-6M	0	0	-10M

-3	0	1	0	1	-2	1
1	1/2	1/2	1	0	1/2	3/2
11+3M	1	6-M	0	0	3M+3	9-M

大M法

-3	0	1	0	1	-2	1
2.5	0.5	0	1	-0.5	1.5	1
29	1	0	0	M-6	M+15	3

故新LP问题(II)的最优解为 $\boldsymbol{X}^* = (0,0,1,1,0,0)^T$
注意到人工变量x_5, x_6均为0，故原LP (I)的最优解为：
$\boldsymbol{x}^* = (0,0,1,1)^T$, 对应的最优值为: $z_{\min} = -3$.

大M法

三、有关大M法的一些说明

1) 若原LP标准形的表格的中心部位已有$l(0 < l < m)$ 个不同的单位列向量，则只需添加$(m-l)$个单位列向量，使中心部位出现m阶单位矩阵就可以了. 即此时只需引入$(m-l)$人工变量,减小了计算量.
2) 在迭代过程中，人工变量一旦由基变量变为自由变量，则不会再成为基变量.此时，它的任务就完成了，这一列便可删去。
3) 若新的LP问题无界(无最优解)，那么原LP问题也无最优解.
4) 大M法也是单纯型法(M可看成一个很大的常数),只不过是在单纯形法的基础上作小的改动得到的.因为有了单纯形算法做基础，因此程序实现比较简单.(优点)
5) 对于实际问题，事先无法预计M究竟应取多大. 若M过大会导致计算误差大. (缺点)

目录

1. LP标准形
2. LP基本原理
3. 单纯形法(Simplex method)
4. 大M法
5. **二阶段法**
6. 线性规划的对偶理论

二阶段法

目的:

解决初始基本可行解不易找出或不存在问题

二阶段法(人工变量法二)

对于线性规划问题

$$\min w=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad \cdots(4.1)$$

假设 $r(\boldsymbol{A})=m$, 且对应的初始单纯形表②满足，①不满足.
那么: 引入人工变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 构造辅助线性规划问题

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{目标函数是所有人工变量之和}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0,\ y_i \geq 0,\ i=1,\cdots,m, j=1$$

二阶段法

令 $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ 矩阵形式

$$\begin{aligned} \min\ z &= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \mathbf{b} \cdots\cdots (4.3) \\ \boldsymbol{x} \geq 0,\ \boldsymbol{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

定理4.2 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{y}^* \end{pmatrix}$ 是 (4.3) 的最优基本可行解.
若 $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 (4.1) 的一个基本可行解;
若 $\boldsymbol{y}^* \neq \mathbf{0}$, 则 (4.1) 无可行解.

上述定理给出了求 (4.1) 的初始基本可行解的方法.

二阶段法

二阶段法的解题思路

- 第一阶段是构造并求解LP(4.3), 得最优解. 若最优解中人工变量全取零, 则进入第二阶段.
- 第二阶段是以第一阶段得到的基本可行解为初始解, 采用单纯形法求解原LP(4.1).
- 若第一阶段结束时, LP(4.3)的最优解中人工变量取值不全为零, 则原问题(4.1)无可行解.

二阶段法

例 13 求解:

$$\min w = 4x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \cdots (\text{I})$$

解：该LP已是标准形，画出对应表格:

2	**1**	**2**	**4**
3	**3**	**1**	**3**
4	**1**	**1**	**0**

容易验证 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 但特点①不满足。

二阶段法

人工变量 人工变量

下面先构造新LP模型：

			y_1	y_2	
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	1	1	0

人工变量的系数 人工变量的系数

二阶段法

2	**1**	**2**	**1**	**0**	**4**
3	**3**	**1**	**0**	**1**	**3**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = y_1 + y_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \qquad \cdots(\text{II}) \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

二阶段法

接下来用单纯形法求解该新LP模型：

2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	1	1	0

仅满足①②

$r_3 - r_1$
$r_3 - r_2$
$\rightarrow$

2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
-5	-4	-3	0	0	-7

满足①②③ 但④不满足

二阶段法

$r_2 \times \frac{1}{3}$
$r_1 - 2r_2$
$r_3 + 5r_1$
$\rightarrow$

0	-1	4/3	1	-2/3	2
1	1	1/3	0	1/3	1
0	1	-4/3	0	5/3	-2

满足①②③ 但不满足④

$r_3 + r_1$
$r_1 \times \frac{3}{4}$
$r_2 - \frac{1}{3} r_1$
$\rightarrow$

0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
0	0	0	1	1	0

满足①②③④

最优解是 $(x, y)^T = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0\right)^T$

人工变量的值为零

二阶段法

所以, 原问题的一个基本可行解为: $(1/2, 0, 3/2)^T$. 由于对增广矩阵进行初等行变换相当于对约束线性方程组进行同解变形,所以若把上述最终表格中人工变量所在的列去掉,底线以下的元素换成原目标函数中变量的系数和零, 则得到原问题的单纯形表:

0	**-3/4**	**1**	**3/2**
1	**5/4**	**0**	**1/2**
4	**1**	**1**	**0**

二阶段法

最后再用单纯形法求解原LP问题：

0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
4	1	1	0

满足①②

$\rightarrow$

0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
0	-13/4	0	-7/2

满足①②③

二阶段法

0	-3/4	1	3/2
1	5/4	0	1/2
0	-13/4	0	-7/2

满足①②③但不满足④

→

3/5	0	1	9/5
4/5	1	0	2/5
13/5	0	0	-11/5

满足①②③④

故原LP问题(I)的最优解为: $\boldsymbol{x}^* = (0, 2/5, 9/5)^T$.

最优值为 ： $w_{\min} = 11/5$.

二阶段法

例14:

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

二阶段法

例14:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

解：该LP已是标准形，画出对应表格：

1	2	3	4	7
2	1	1	2	3
5	-2	3	-6	0

二阶段法

1	2	3	4	1	0	7
2	1	1	2	0	1	3
0	0	0	0	1	1	0

1	2	3	4	1	0	7
2	1	1	2	0	1	3
-3	-3	-4	-6	0	0	-10

-3	0	1	0	1	-2	1
1	0.5	0.5	1	0	0.5	1.5
4	0	-1	0	0	3	-1

二阶段法

-3	0	1	0	1	-2	1
2.5	0.5	0	1	-0.5	1.5	1
1	0	0	0	1	1	0

故新LP问题的最优解为 $\boldsymbol{X}^* = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^T$

二阶段法

进入到第二阶段计算：

-3	0	1	0	1
2.5	0.5	0	1	1
5	-2	3	-6	0

-3	0	1	0	1
2.5	0.5	0	1	1
29	1	0	0	3

故原LP的最优解为： $\boldsymbol{x}^* = (0,0,1,1)^T$, 对应的最优值为: $z_{\min} = -3$.

目录

1 LP标准形

2 LP基本原理

3 单纯形法(Simplex method)

4 大M法

5 二阶段法

6 线性规划的对偶理论

第五节线性规划的对偶理论

- Dual Theory
- 线性规划的对偶模型 *
- 对偶性质
- 对偶单纯形法 S

一、线性规划的对偶模型

1.对偶问题的现实来源

设某工厂生产两种产品甲和乙，需4种设备A, B, C, D, 若生产每件产品所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

设备 / 产品	A	B	C	D	产品利润（千元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

问：工厂应生产甲和乙产品各多少件，才能获得最大利润？

解：设甲、乙型产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& 4x_1 \le 16 \\
& 4x_2 \le 12 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

最优解为$\boldsymbol{x}^* = (4,2)^T$, 最优值为 $z_{\max} = 14$.

线性规划的对偶理论

反过来问：

若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租设备只收设备租金费，那么 4 种机器的机时应如何定价才是最佳决策？

线性规划的对偶理论

反过来问：

若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租设备只收设备租金费，那么 4 种机器的机时应如何定价才是最佳决策？

【要求】

1. **租户付出的代价最小，且能接受；**
2. 4**种机器同等机时的租金不低于用于生产带来的利润。**

线性规划的对偶理论

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策应符合两条：

（1）不吃亏原则。

机时定价所赚利润不能低于用于加工甲、乙型产品所获利润。

（2）竞争性原则。

在上述不吃亏原则下，机时总收费尽可能低一些，以便争取更多用户，最终将设备出租出去。

解： 设 A、B、C、D 设备的机时定价分别为 y_1、y_2、y_3、y_4 千元，则新的线性规划数学模型为：

$$
\begin{aligned}
\min\ w &= 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4 \\
\text{s.t. } & 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\
& 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

用单纯形法求得最优解为 $\boldsymbol{y}^* = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)^T$
最优值为 $w_{\min} = 14$

2. 原问题与对偶问题的对应关系

原始规划与对偶规划是同一组数据参数，只是位置有所不同，所描述的问题实际上是同一个问题从另一种角度去描述.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \text{ s.t. } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题(对偶问题)

$$\min w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4 \text{ s.t. } \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题(原间题)

线性规划的对偶理论

线性规划的对偶模型特点

任给一个求目标函数最大(小)的线性规划模型，都存在另一个求目标函数最小(大)的线性规划模型与之对应。
这两个模型具有同一组数据参数，只是数据所在位置有所不同，它们实际上是对同一问题从不同角度去描述而得到的两个不同的模型.
若把一个称为原问题，另一个就称为对偶问题。

问题： 任给一个线性规划，如何写其对偶规划呢？

一般线性规划的对偶变换规则(单向)

<table>
<tr><td colspan="2">原问题(或对偶问题)</td><td colspan="2">对偶问题(或原问题)</td></tr>
<tr><td colspan="2">约束条件右端项</td><td colspan="2">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数变量的系数</td><td colspan="2">约束条件右端项</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数 max</td><td colspan="2">目标函数 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m个</td><td>m个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>≤</td><td>≥0</td></tr>
<tr><td>≥</td><td>≤0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n个</td><td>n个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>≥0</td><td>≥</td></tr>
<tr><td>≤0</td><td>≤</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
</table>

写对偶规划的一般步骤

1) 确定对应方向(即从左往右，还是从右往左);
2) 确定变量的个数;
3) 写出目标函数;
4) 写出约束条件左边及右边, 最后确定不等号和变量的符号。

例 15: 写出下列LP问题的对偶问题。

$$
\begin{aligned}
\min\ Z &= 2x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 6 \\
& -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

例 15: 写出下列LP问题的对偶问题。

$$
\begin{aligned}
\min\ Z &= 2x_1 + 4x_2 - x_3 \\
\text{s.t. } & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6 \\
& -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8 \\
& x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 15 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \le 0
\end{aligned}
$$

解： 原问题的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ W &= 6y_1 + 12y_2 + 8y_3 + 15y_4 \\
\text{s.t. } & 3y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 \le 2 \\
& -y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 \ge 4 \\
& 2y_1 - 3y_2 + 2y_3 - y_4 = -1 \\
& y_1 \ge 0, y_3 \le 0, y_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 原始问题变量的个数(3)等于对偶问题约束条件的个数(3); 原始问题约束条件的个数(4)等于对偶问题变量的个数(4)。
- 原始问题变量的性质影响对偶问题约束条件的性质, 原始问题约束条件的性质影响对偶问题变量的性质。

例16: 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \quad \text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

线性规划的对偶理论

例16: 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \quad \text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\min W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \quad \text{s.t.} \begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \geq -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$